2023年度　杏林大学（前期）

医学部　試験時間：60 分

全問必答

1　複数の玉が入った袋から玉を 1 個取り出して袋に戻す事象を考える。どの玉も同じ確率で取り出されるものとし，n を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1)　袋の中に赤玉 1 個と黒玉 2 個が入っている。この袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉と同じ色の玉をひとつ加え，合計 2 個の玉を袋に戻すという試行を繰り返す。n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を p_n とすると，次式が成り立つ。

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad p_3 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

(2)　袋の中に赤玉 3 個と黒玉 2 個が入っている。この袋の中から玉を 1 個取り出し，赤玉と黒玉を 1 個ずつ，合計 2 個の玉を袋に戻す試行を繰り返す。n 回目の試行において赤玉が取り出される確率を P_n とすると，次式が成り立つ。

$$P_2 = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}},\quad P_3 = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

n 回目の試行開始時点で袋に入っている玉の個数 M_n は $M_n = n + \boxed{\text{ス}}$ であり，この時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数 R_n は $R_n = M_n \times P_n$ と表される。n 回目の試行において黒玉が取り出された場合にのみ，試行後の赤玉の個数が試行前と比べて $\boxed{\text{セ}}$ 個増えるため，$n+1$ 回目の試行開始時点で袋に入っていると期待される赤玉の個数は $R_{n+1} = R_n + (1-P_n)\times\boxed{\text{セ}}$ となる。したがって，

$$P_{n+1} = \frac{n+\boxed{\text{ソ}}}{n+\boxed{\text{タ}}}\times P_n + \frac{1}{n+\boxed{\text{チ}}}$$

が成り立つ。このことから，

$$(n+3)\times\left(n+\boxed{\text{ツ}}\right)\times\left(P_n - \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

が n に依らず一定となることがわかり，

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

と求められる。

2　$\boxed{ヌ}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

点 O を原点とする座標空間に 3 点 A$(-1,\ 0,\ -2)$，B$(-2,\ -2,\ -3)$，C$(1,\ 2,\ -2)$ がある。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{アイ}$ であり，△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{ウエ}}$ である。

△ABC の外接円の中心を点 P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{オ}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つ。

(2)　△ABC の重心を点 G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ であり，線分 OB を 2：1 に内分する点を Q とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left(\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}},\ \frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}},\ \boxed{タ}\right)$$

となる。

(3)　線分 OC を 2：1 に内分する点を R とし，3 点 A，Q，R を通る平面 α と直線 OG との交点を S とする。点 S は平面 α 上にあることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{OB}} + v\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\left(\text{ただし，}t,\ u,\ v\text{ は }t + \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}u + \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}v = 1\text{ を満たす実数}\right)$$

と書けるので，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ となることがわかる。

平面 α 上において，点 S は三角形 AQR の $\boxed{ヌ}$ に存在し，四面体 O−AQR の体積は，四面体 O−ABC の体積の $\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$ 倍である。

$\boxed{ヌ}$ の解答群

① 辺 AQ 上　　② 辺 AR 上　　③ 辺 QR 上　　④ 内　部　　⑤ 外　部

3　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つずつ選べ。

座標空間において原点 O を中心とする半径 1 の円 C が xy 平面上にあり，$x>0$ の領域において点 A(0, −1, 0) から点 B(0, 1, 0) まで移動する C 上の動点を P とする。

(1)　下記の 2 条件を満たす直角二等辺三角形 PQR を考える。

- 点 Q は C 上にあり，直線 PQ は x 軸に平行である。
- 点 R の z 座標は正であり，直線 PR は z 軸に平行である。

点 P が点 A から点 B まで移動するとき，三角形 PQR の周および内部が通過してできる立体 V について，以下の問いに答えよ。

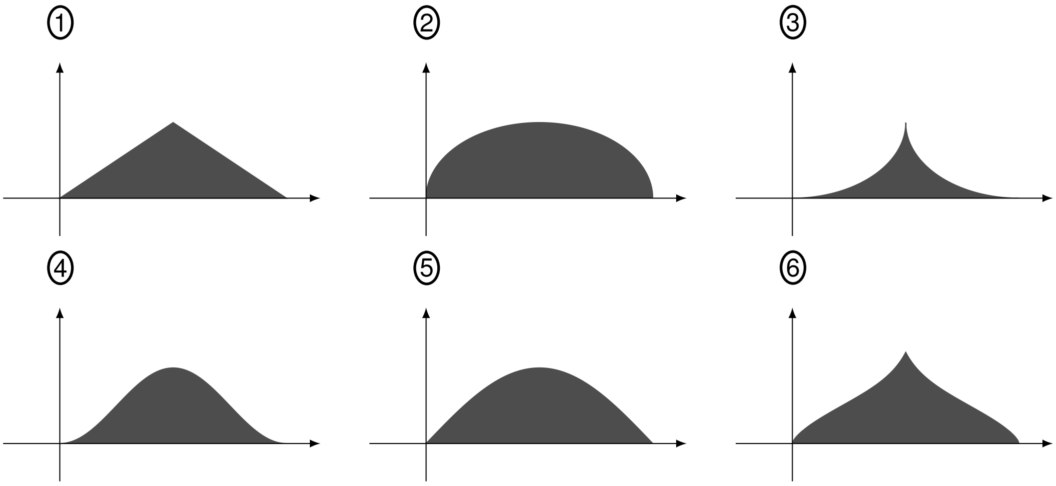
(a)　点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 PR が通過してできる曲面の展開図は，横軸に弧 AP の長さ，縦軸に線分 PR の長さをとったグラフを考えればよく，$\boxed{\text{ア}}$ で表される概形となり，その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。

線分 PQ の中点を M とし，点 M から直線 QR に引いた垂線と線分 QR との交点を H とする。点 H は線分 QR を 1：$\boxed{\text{ウ}}$ に内分する点である。点 P の位置に依らず，線分の長さについて

$$\boxed{\text{エ}}\times(\mathrm{MH})^2+(\mathrm{OM})^2=1$$

が成り立つ。点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 MH が通過する領域の概形は $\boxed{\text{オ}}$ であり，面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群



(b)　点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 QR が通過してできる曲面上において，2 点 A，B を結ぶ最も短い曲線は $\boxed{\text{ク}}$ が描く軌跡である。

①　点 Q　　②　点 R
③　設問 (a) で考えた点 H　　④　線分 QR と yz 平面との交点
⑤　線分 QR を 1：$\sqrt{2}$ に内分する点　　⑥　線分 QR を $\sqrt{2}$：1 に内分する点
⑦　三角形 PQR の重心から線分 QR に引いた垂線と線分 QR との交点

(c)　点 P が点 A から点 B まで移動するとき，線分 PQ を直径とする xz 平面に平行な円が通過してできる球の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ である。

また，三角形 PQR の面積は，線分 PQ を直径とする円の面積の $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\pi}$ 倍である。したがって，立体 V の体積は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(2) $z \geqq 0$ の領域において，yz 平面上の点 T を頂点とし，2 点 P，Q を通る放物線 L を考える。ただし，Q，T は下記の 2 条件を満たす点である。

- 点 Q は C 上にあり，直線 PQ は x 軸に平行である。
- 三角形 PQT は xz 平面に平行であり，点 T の z 座標は線分 PQ の長さに等しい。

点 P が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，放物線 L を表す式は

$$y = 0,\ z = \boxed{\text{セソ}}\,x^2 + \boxed{\text{タ}}\ ,\ (\text{ただし } -1 \leqq x \leqq 1)$$

であり，この放物線と線分 PQ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

点 P が点 A から点 B まで移動するとき，放物線 L と線分 PQ で囲まれる図形が通過してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

2023 年度　杏林大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{ア}{イ}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{ウ}{エ}:\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{オカ}{キク}:\dfrac{17}{30}$　$\dfrac{ケコ}{サシ}:\dfrac{23}{42}$　ス : 4　セ : 1　$\dfrac{n+ソ}{n+タ}:\dfrac{n+3}{n+5}$　$\dfrac{1}{n+チ}:\dfrac{1}{n+5}$　ツ : 4　$\dfrac{テ}{ト}:\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{ナ}{ニ}:\dfrac{1}{2}$

2

(1) アイ : -6　$\sqrt{ウエ}:\sqrt{26}$　オ : 4　$\dfrac{カ}{キ}:\dfrac{7}{2}$

(2) $\dfrac{ク}{ケ}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{コサ}{シ}:\dfrac{-1}{3}$　$\dfrac{スセ}{ソ}:\dfrac{-4}{3}$　タ : 0

(3) $\dfrac{チ}{ツ}:\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{テ}{ト}:\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{ナ}{ニ}:\dfrac{3}{4}$　ヌ : ④　$\dfrac{ネ}{ノ}:\dfrac{4}{9}$

3

(1) ア : ⑤　イ : 4　ウ : 3　エ : 2　オ : ②　$\dfrac{\sqrt{カ}}{キ}:\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　ク : ③　$\dfrac{ケ}{コ}:\dfrac{4}{3}$　$\dfrac{サ}{\pi}:\dfrac{2}{\pi}$　$\dfrac{シ}{ス}:\dfrac{8}{3}$

(2) セソ : -2　タ : 2　$\dfrac{チ}{ツ}:\dfrac{8}{3}$　$\dfrac{テト}{ナ}:\dfrac{32}{9}$