

2023 年度 東北医科薬科大学 (前期)

医学部
試験時間：70 分

全問必答

1 座標平面上でサイクロイド $C: x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考える。C 上の点 $P(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($0 < t < 2\pi$) における接線および法線をそれぞれ l_t, L_t で表す。また、 l_t と x 軸の交点を A, L_t と x 軸の交点を B, 線分 PB の中点を Q とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) L_t の傾きを t を用いて表すと $\boxed{\text{ア}} \tan \frac{t}{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

(2) $t = \frac{4}{3}\pi$ のとき、3 点 A, B, Q の座標は、

$$A \left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}, 0 \right), B \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi, 0 \right),$$

$$Q \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi + \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \right)$$

である。

(3) t が $0 < t < 2\pi$ を動くとき、点 Q が描く軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi$ である。この図形を x 軸の周りに回転して得られる立体の体積 V を $V = a\pi^b$ と整数 a, b を用いて表すとき、 $a = \boxed{\text{チ}}$, $b = \boxed{\text{ツ}}$ となる。

2 袋 A から袋 D には数字が書かれたカードが入っている。どのカードにも数字はただ一つ書かれている。袋 A には 1, 2, 3, 4 の数字の赤色のカードが各 1 枚ずつ計 4 枚は入っている。袋 B には 0 の数字のカードが 1 枚, 1 の数字のカードが 2 枚の計 3 枚の青色のカードが入っている。袋 C には 1 の数字のカードが 2 枚, 2 の数字のカードが 1 枚, 3 の数字のカードが 1 枚, 4 の数字のカードが 1 枚の計 5 枚の緑色のカードが入っている。袋 D には 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の数字が書かれた黄色のカードが各 1 枚ずつ計 10 枚入っている。袋 A, B, C, D から 1 枚ずつカードを引いて、赤, 青, 緑, 黄色の順にそれぞれ千の位, 百の位, 十の位, 一の位に数字を並べてできる 4 桁の正の整数を N とする。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) N が 2000 以上 4000 以下の奇数となる確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(2) N が 3 の倍数である確率は $\frac{\text{ウエオ}}{\text{カキク}}$ であり, 6 の倍数である確率は $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ である。

(3) N が 7 の倍数である確率は $\frac{\text{サ}}{\text{シス}}$ であり, 2, 3, 5, 7 のいずれの倍数でもない確率は $\frac{\text{セ}}{\text{ソタ}}$ である。

3 以下の問いに答えなさい。

(1) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\text{ア}}$ である。

(2) $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x+b}{x^2+cx+d} \right)$ と部分分数に分解するとき, $a = \text{イ}$, $b = \text{ウエ}$, $c = \text{オカ}$, $d = \text{キ}$ である。

(3) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{\text{ク}} \left(\log \text{ケ} + \frac{\pi}{\sqrt{\text{コ}}} \right)$ である。ただし, \log は自然対数とする。

(4) $J = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^2} dx = \frac{1}{\text{サ}} + \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \left(\log \text{セ} + \frac{\pi}{\sqrt{\text{ソ}}} \right)$ である。ただし, \log は自然対数とする。

2023年度 東北医科薬科大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $\text{ア} \tan \frac{t}{i} : -\tan \frac{t}{2}$

(2) $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}} : \frac{4}{3}$ オ $\sqrt{\text{カ}} : 2\sqrt{3}$ $\frac{\text{キ}}{\text{ク}} : \frac{4}{3}$ $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}} : \frac{4}{3}$ $\frac{\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}} : \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\frac{\text{ス}}{\text{セ}} : \frac{3}{4}$

(3) $\frac{\text{ソ}}{\text{タ}} : \frac{5}{4}$ チ : 1 ツ : 2

2

(1) $\frac{\text{ア}}{\text{イ}} : \frac{1}{4}$

(2) $\frac{\text{ウエオ}}{\text{カキク}} : \frac{101}{300}$ $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}} : \frac{1}{6}$

(3) $\frac{\text{サ}}{\text{シス}} : \frac{2}{15}$ $\frac{\text{セ}}{\text{ソタ}} : \frac{7}{30}$

3

(1) $\frac{\pi}{\text{ア}} : \frac{\pi}{4}$

(2) イ : 3 ウエ : -2 オカ : -1 キ : 1

(3) $\frac{1}{\text{ク}} : \frac{1}{3}$ ケ : 2 $\frac{\pi}{\sqrt{\text{コ}}} : \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{1}{\text{サ}} : \frac{1}{6}$ $\frac{\text{シ}}{\text{ス}} : \frac{2}{9}$ セ : 2 $\frac{\pi}{\sqrt{\text{ソ}}} : \frac{\pi}{\sqrt{3}}$