

2023 年度 浜松医科大学 (前期)

医学部

試験時間 : 90 分

全問必答

1 以下の枠内の問題

問題

次の条件を満たす係数が整数の多項式 $f(x)$ を考える。

- (I) $f(0)$ は 4 で割り切れない。
 - (II) 方程式 $f(x) = 0$ は $x = 1$ で重解をもつ。
 - (III) 方程式 $f(x) = x(x-1)(x-2)$ は異なる整数解をもつ。
- このとき、 $f(4)$ を 36 で割ったときの余りを求めよ。

に対する右の答案 A に対して、2 つの下線部 (a) および (b) の詳しい証明を与えよ。ただし、2 つの波線部の事実は証明なしに用いてよい。

答案 A

条件 (II) より、因数定理を用いれば $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ を満たす係数が整数の多項式 $g(x)$ が存在する。このとき、条件 (III) を満たす整数解の中で 1 以外の解 x_0 をとれば、

$$(x_0 - 1)g(x_0) = x_0(x_0 - 2) \cdots \cdots (\#)$$

が成立する。ここで、 $g(x_0)$ は整数であるから、式 (#) を満たす x_0 は 0 または 2 である。もし $x_0 = 0$ とすれば、 $f(0) = 0$ となり、この値は 4 で割り切れるから、条件 (I) に反する。ゆえに $x_0 \neq 0$ であるから $x_0 = 2$ であり、このとき、式 (#) より

$$g(2) = 0$$

であるから、再び因数定理を用いれば、

$$g(x) = (x-2)h(x)$$

を満たす係数が整数の多項式 $h(x)$ が存在する。よって、

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)h(x)$$

と表すことができるから、 $h(4)$ は奇数である。以上より、整数 m を用いて $h(4) = 2m + 1$ とおけば

$$f(4) = 18h(4) = 36m + 18$$

であるから、 $f(4)$ を 36 で割ったときの余りは 18 である。

2 医療で使われる技術の 1 つとして、磁気共鳴画像法 (MRI) がある。MRI は画像の濃淡を表す関数、例えば

$$M(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x) \quad (x \text{ は実数})$$

を用いて体内の様子を可視化する技術である。ここで、 $I_n(x)$ は

$$I_n(x) = \int_0^n e^{-t} \cos(tx) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $I_n(x)$ を求めよ。
- (2) 極限 $M(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x)$ を求めよ。
- (3) 関数 $y = M(x)$ について、増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

3 S を実部、虚部ともに整数であるような 0 以外の複素数全体の集合、 T を偏角が 0 以上 $\frac{\pi}{2}$ 未満であるような S の要素全体の集合とする。ただし、複素数 z の偏角を $\arg z$ とするとき $0 \leq \arg z < 2\pi$ の範囲で考えることとする。また、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = 2$, $\beta = 1 + i$, $\gamma = 1$ のとき、 $|\alpha\beta\gamma|$ の値を求めよ。
- (2) 複素数 z について、 $\arg z = \frac{\pi}{8}$ のとき $\arg(iz)$ の値を求めよ。
- (3) α, β, γ を T の要素とする。このとき、 $0 < |\alpha\beta\gamma| \leq \sqrt{5}$ を満たす α, β, γ の組の総数 k の値を求めよ。
- (4) α, β, γ を S の要素とする。このとき、 $0 < |\alpha\beta\gamma| \leq \sqrt{5}$ および

$$\frac{\pi}{8} \leq \arg(\alpha\beta\gamma) < \frac{5}{8}\pi$$

を満たす α, β, γ の組の総数を m とするとき、 m を k で割った商と余りを求めよ。

4 $\triangle ABC$ において、 $BC = 3$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle ACB = \theta$ とする。 b と c を素数とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) $b = 3$, $c = 5$ のとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\cos \theta < 0$ のとき、 $c = b + 2$ が成り立つことを示せ。
- (3) $-\frac{5}{8} < \cos \theta < -\frac{7}{12}$ のとき、 b と c の値の組をすべて求めよ。

2023年度 浜松医科大学（前期）

理系学部

（略解）

☞ 証明，図示などは省略

1 証明は省略**2**

(1) $I_n(x) = \frac{1 - e^{-n} \cos(nx) + x e^{-n} \sin(nx)}{1 + x^2}$ (2) $M(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

(3) 極大値：1 ($x = 0$)，変曲点： $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ ，図示は省略

3

(1) $2\sqrt{2}$

(2) $\frac{5}{8}\pi$

(3) $k = 16$

(4) 商；16，余り：0

4

(1) $\cos \theta = -\frac{7}{18}$

(2) 証明は省略

(3) $(b, c) = (11, 13), (17, 19)$