2023 年度　高知大学（前期）

医学部　試験時間：120 分　　全問必答

1　n を正の偶数とし，$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ とする。さらに，$g(x) = f(x)e^{-x}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2)　$x<0$ のとき，$g(x)>1$ であることを示せ。

(3)　方程式 $f(x) = 0$ は実数解をもたないことを示せ。

2　集合 A を次で定義する。

$$A = \{m^2 - n^2 \mid m \text{ と } n \text{ は整数}\}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　7 は A の要素であることを証明せよ。

(2)　6 は A の要素ではないことを証明せよ。

(3)　奇数全体の集合は A の部分集合であることを証明せよ。

(4)　偶数 a が A の要素であるための必要十分条件は，ある整数 k を用いて $a = 4k$ とかけることであることを証明せよ。

3　d，r は実数で，$r>0$ とする。数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$ で公差が d の等差数列とする。数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 4$ で公比が r の等比数列とする。さらに，数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = \begin{cases} a_n & (a_n \geqq b_n \text{のとき}) \\ b_n & (a_n < b_n \text{のとき}) \end{cases}$$

によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$c_3 = c_4 = 3$ となるような d, r を求めよ。

(2)　$d = -\dfrac{1}{64}$，$r = \dfrac{1}{2}$ のとき，$c_n = a_n$ を満たす最大の n を求めよ。

(3)　$d = 9$，$r = 2$ のとき，$\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めよ。

4　次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

が成り立つことを，加法定理と 2 倍角の公式を用いて示せ。

(2)　実数 θ を，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ と $\cos 3\theta = -\dfrac{11}{16}$ を同時に満たすものとする。このとき，$\cos\theta$ を求めよ。

(3)　(2) の θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} \sin^5 x\, dx$ を求めよ。

2023年度　高知大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$g'(x) = -\dfrac{e^{-x}x^n}{n!}$　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略

2

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略　(4)　証明は省略

3

(1)　$d = \dfrac{1}{3}$，$r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2)　$n = 128$

(3)　$\begin{cases} 4 & (n = 1) \\ 15 & (n = 2) \\ 2^{n+2} + 3 & (n \geqq 3) \end{cases}$

4

(1)　証明は省略　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{4}$　(3)　$\dfrac{1503}{5120}$