2024 年度　九州大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$a \neq -1$，$a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2)　a が $-1<a<1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

2　整式

$$f(z)=z^6+z^4+z^2+1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z|=1$ が成り立つことを示せ。

(2)　次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。
　条件：$f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して
　　　$f(wz)=0$ が成り立つ。

3　以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 a，b が $a<b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2)　$2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3)　$a!+b!=2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

4　n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$L(3)$ を求めよ。

(2)　$L(4)$ を求めよ。

(3)　$L(5)$ を求めよ。

5　自然数 m，n に対して

$$I(m,\ n)=\int_1^e x^m e^x (\log x)^n\,dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$I(m+1,\ n+1)$ を $I(m,\ n+1)$，$I(m,\ n)$，m，n を用いて表せ。

(2)　すべての自然数 m に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(m,\ n)=0$ が成り立つことを示せ。

2024 年度　九州大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

（1） 証明は省略

（2） 最大値：$\sqrt{2}$　（$a=0$）

2

（1） 証明は省略

（2） $w=1,\ -1$

3

（1） 証明は省略

（2） $(a,\ b)=(1,\ 2)$

（3） $(a,\ b,\ c)=(1,\ n,\ n)$　（n は自然数）

4

（1） $L(3)=8$

（2） $L(4)=14$

（3） $L(5)=32$

5

（1） $I(m+1,\ n+1)=e^{m+e+1}-(m+1)I(m,\ n+1)-(n+1)I(m,\ n)$

（2） 証明は省略