2024 年度　北里大学（前期）

医学部　試験時間：80 分

全問必答

1 次の各文の $\boxed{}$ にあてはまる答を求めよ。

(1) 2 つの実数 x, y は $x^2+y^2 \leqq 4$, $x \geqq 0$ を満たすとする。このとき，$3x+4y-3$ の最小値は $\boxed{(ア)}$，最大値は $\boxed{(イ)}$ である。また，$3x^2+4xy-3y^2$ の最大値は $\boxed{(ウ)}$ である。

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，曲線 $y=\sin x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和は $\boxed{(エ)}$ である。$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=\cos x$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{(オ)}$ である。また，$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt$ とすると，関数 $f(x)$ の最小値は $\boxed{(カ)}$ である。

(3) 座標空間に 4 点 A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(2,\ 0,\ 1)$，C$(-2,\ 2,\ 0)$，D$(1,\ 0,\ 5)$ がある。このとき，三角形 ABC の面積は $\boxed{(キ)}$ である。平面 ABC 上に点 H を直線 DH が平面 ABC と垂直になるようにとると，点 H の座標は $\boxed{(ク)}$ である。また，四面体 ABCD の体積は $\boxed{(ケ)}$ である。

(4) 2052 の正の約数は全部で $\boxed{(コ)}$ 個あり，2052 の正の約数の総和は $\boxed{(サ)}$ である。また，300 以下の正の整数のうち，正の約数の個数が偶数であるものは全部で $\boxed{(シ)}$ 個ある。

2 次の問に答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x}$ の定積分を用いて，$n \geqq 2$ を満たすすべての整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\log n$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $f(x)=x+\dfrac{x}{1+x}-2\log(1+x)$ とおく。すべての正の実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つことを証明せよ。さらに，すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}>2\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $n \geqq 2$ を満たすすべての整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)>\log n$ が成り立つことを証明せよ。

3 箱 A には赤玉 2 個，白玉 1 個が入っており，箱 B には白玉 3 個が入っている。2 つの箱 A，B について，次の操作を繰り返す。

（操作）2 つの箱 A，B からそれぞれ 1 個ずつ玉を同時に取り出し，箱 A から取り出した玉を箱 B に入れて，箱 B から取り出した玉を箱 A に入れる。

n 回目の操作を終えたときに箱 A に入っている赤玉の個数が 2 個，1 個，0 個である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n として，3 つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，$\{r_n\}$ を定める。次の問に答えよ。

(1) p_1，q_1，p_2，q_2 の値をそれぞれ求めよ。また，正の整数 n に対し，r_n を p_n と q_n を用いて表せ。

(2) 正の整数 n に対し，p_{n+1} を p_n と q_n を用いて表し，q_{n+1} を q_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $s_n=3^n p_n$ とおく。数列 $\{s_n\}$ の一般項を求めよ。さらに，数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

2024 年度　北里大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　(ア)：11　(イ)：7　(ウ)：$4\sqrt{13}$

(2)　(エ)：4　(オ)：$2\sqrt{2}$　(カ)：$2-\sqrt{2}$

(3)　(キ)：$\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$　(ク)：$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 2\right)$　(ケ)：$\dfrac{15}{2}$

(4)　(コ)：24　(サ)：5600　(シ)：283

2

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略

3

(1)　$p_1=\dfrac{1}{3}$，$q_1=\dfrac{2}{3}$，$p_2=\dfrac{7}{27}$，$q_2=\dfrac{16}{27}$，$r_n=1-p_n-q_n$

(2)　$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{9}q_n$，$q_{n+1}=-\dfrac{1}{9}q_n+\dfrac{2}{3}$

(3)　$q_n=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{15}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

(4)　$s_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3^n}{5}-\dfrac{1}{10}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，$p_n=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\dfrac{1}{30}\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$