2024 年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　　試験時間：90 分

全問必答

1

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{2a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対し，$a_n \geqq 2$ であることを示せ。

(2)　ある自然数 n に対して，$a_n < \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} > \sqrt{5}$，また，$a_n > \sqrt{5}$ ならば $a_{n+1} < \sqrt{5}$ であることを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対し，

$$\left| a_{n+1} - \sqrt{5} \right| \leqq \frac{\sqrt{5} - 2}{4} \left| a_n - \sqrt{5} \right|$$

であることを示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

2　座標空間に点 A(2，1，3) と点 B(1，3，4) があり，また zx 平面上を動く点 P と yz 平面上を動く点 Q がある。次の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結果のみ解答せよ。

(1)　線分の長さの和 AP＋BP の最小値を求めよ。また和が最小になるときの点 P の座標を求めよ。

(2)　3 つの線分の長さの和 AP＋PQ＋BQ の最小値を求めよ。また和が最小となるときの点 P，点 Q の座標を求めよ。

3　e は自然対数の底とし，a，b は実数定数とする。座標平面内の曲線

$$C : y = f(x) = \frac{e^{x-a} + e^{-x+a}}{2} + b$$

および直線

$$L : y = g(x) = x$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} h(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x)$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

(2)　C と L が接するための a，b の条件を求めよ。

(3)　C と L が相異なる 2 点で交わるための a，b の条件を求めよ。

4　xy 平面上で点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は,

$$x = r,\ y = \sin\theta\cos^2 r + \sin\theta\cos r + 1$$

を満たしながら動くものとする。r，θ は実数として，次の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ かつ $0 \leqq r \leqq \pi$ を満たしながら r が変化するとき，点 P の描く曲線を求め図示せよ。

(2)　$\dfrac{\pi}{4} \leqq r \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら r，θ が変化するとき，点 P が動く領域の面積を求めよ。

2024 年度　大阪医科薬科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　証明は省略　(2)　証明は省略　(3)　証明は省略　(4)　$\sqrt{5}$

2

(1)　最小値：$3\sqrt{2}$　$\mathrm{P}\left(\dfrac{7}{4},\ 0,\ \dfrac{13}{4}\right)$

(2)　最小値：$\sqrt{26}$　$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{4},\ 0,\ \dfrac{13}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$

3

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$　(2)　$a-b=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$

(3)　$a-b>\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$

4

(1)　図示は省略　(2)　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{16}(\pi+6-4\sqrt{2})$