2024 年度　川崎医科大学（前期）

医学部　試験時間：80 分

全問必答

1　O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，B$(2-\sqrt{3},\ 1)$ がある。

(1)　線分 OA の長さは $\boxed{\text{ア}}$ であり，直線 OA と x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\alpha=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である。また，直線 OB の方程式は $y=\left(\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\right)x$ であり，2 直線 OA，OB のなす角を $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\beta=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である。

(2)　点 A を中心として点 O を通る円を K とし，2 直線 OA，OB と円 K の交点で第 1 象限にあるものをそれぞれ C，D とする。線分 OC，OD および短い方の弧 CD で囲まれる領域を S とする。

(i)　領域 S の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ク}}}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$ であり，点 D の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}-\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}},\ \frac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}+\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

である。

(ii)　円 K 上の点 C における接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{ソ}}x+\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$$

である。また，点 P$(x,\ y)$ が領域 S を動くとき，$x+2y$ の最大値は

$$\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}<\boxed{\text{ナ}}$ とする。

(iii)　線分 AC，AD および短い方の弧 CD で囲まれた扇形 ACD を，直線 OD の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\pi^{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

2　OA $=3$，OB $=2$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{6}$ の平行四辺形 OACB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\boxed{\text{ア}}$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$ である。また，平行四辺形 OACB の面積は $\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(2)　点 O から対角線 AB に垂線を引き交点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\vec{b}$ である。また，直線 OD と辺 BC の交点を E とするとき，BE : EC を最も簡単な整数比で表すと $\boxed{\text{シ}}:\boxed{\text{ス}}$ である。

(3)　(2) のとき，3 点 O，A，D を通る円を K とし，その中心を F とする。円 K と直線 OC の交点で O でない方を G，円 K と直線 DF の交点で D でない方を H，円 K と直線 OB の交点で O でない方を I とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{b}$ であり，三角形 OAD の面積を S，五角形 OHAGI の面積を T とすると，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である。

3　自然数 n に対して，定義域を $x \leqq 1$ とする 2 つの関数

$$f_n(x) = x(1-x)^n,\ g_n(x) = x^2(1-x)^n$$

を定める。

(1)　$f_2(x)$ の導関数は，

$$f_2'(x) = \left(x - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}\,x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

であり，$f_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。また，$g_2(x)$ の極大値は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(2)　すべての自然数 n に対して，

$$f_n(x) - g_n(x) = f_{n+\boxed{\text{コ}}}(x)$$

が成り立つ。

(3)　$f_n(x)$ の導関数は，

$$f_n'(x) = \boxed{\text{サ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{シ}}\right)x - \boxed{\text{ス}}\right\}(1-x)^{n-1}$$

であり，$g_n(x)$ の導関数は，

$$g_n'(x) = \boxed{\text{セ}}\left\{\left(n + \boxed{\text{ソ}}\right)x - \boxed{\text{タ}}\right\}x(1-x)^{n-1}$$

である。

(4)　2 つの曲線 $y = f_n(x)$，$y = g_n(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とすると，

$$S_n = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\left(n + \boxed{\text{ツ}}\right)\left(n + \boxed{\text{テ}}\right)}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ツ}} < \boxed{\text{テ}}$ とする。

また，関数 $f_n(x)$ が極大値をとるときの x の値を p_n とおくとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n S_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$$

である。

2024 年度　川崎医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア : 2　$\dfrac{イ}{ウ}$: $\dfrac{1}{4}$　エ $+\sqrt{オ}$: $2+\sqrt{3}$　$\dfrac{カ}{キ}$: $\dfrac{1}{6}$

(2) (i)　$\sqrt{ク}+\dfrac{ケ}{コ}$: $\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{サ\sqrt{シ}-\sqrt{ス}}{セ}$: $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

(ii)　ソ $x+$ タ$\sqrt{チ}$: $-x+4\sqrt{2}$　ツ$\sqrt{テ}+$ ト$\sqrt{ナ}$: $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

(iii)　$\dfrac{ニ}{ヌ}$: $\dfrac{4}{3}$　ネ : 2

2

(1)　ア : 1　$\sqrt{イウ}$: $\sqrt{11}$　$\sqrt{エオ}$: $\sqrt{35}$

(2)　$\dfrac{カ}{キク}$: $\dfrac{3}{11}$　$\dfrac{ケ}{コサ}$: $\dfrac{8}{11}$　シ：ス : 3：5

(3)　$\dfrac{セ}{ソ}$: $\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{タ}{チ}$: $\dfrac{2}{3}$　$\dfrac{ツテ}{トナニ}$: $\dfrac{48}{103}$

3

(1)　ア : 1　イ $x-$ ウ : $3x-1$　$\dfrac{エ}{オカ}$: $\dfrac{4}{27}$　$\dfrac{キ}{クケ}$: $\dfrac{1}{16}$

(2)　コ : 1　サ $\{(n+シ)x-ス\}$: $-\{(n+1)x-1\}$　セ $\{(n+ソ)x-タ\}$: $-\{(n+2)x-2\}$

(3)　$\dfrac{チ}{(n+ツ)(n+テ)}$: $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$　$\dfrac{ト}{ナニ}$: $\dfrac{1}{12}$