

2024 年度 徳島大学 (前期)

医学部

試験時間 : 120 分

全問必答

1 座標平面上の原点 O を中心とする単位円の円周上に 3 点 A, B, C がこの順番で反時計回りに位置している。 $\angle AOB = \alpha, \angle BOC = \beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) とする。

- (1) $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{6}$ のとき、 $|\overrightarrow{AC}|^2$ の値を求めよ。
- (2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}, \sqrt{2} \sin \alpha = \cos \alpha$ のとき、内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の値を求めよ。
- (3) $\alpha + \beta = \pi$ のとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ を満たす座標平面上の点 P が 1 点のみとなる条件を α を用いて表せ。

2 曲線 $y = \frac{x^2}{2} - 1$ を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 $\left(t, \frac{t^2}{2} - 1\right)$ ($t \neq 0$) における法線の方程式を求めよ。
- (2) 点 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ を通る曲線 C の異なる 2 つの法線を求めよ。
- (3) (1) で求めた法線のうちで、点 (X, Y) ($X \neq 0$) を通るものがちょうど 2 つ存在するための条件を X と Y の関係式で表せ。

3 関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ のとき $f(x) \geq 0$ を満たす。自然数 n に対して、連立不等式 $0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq f(x)$ の表す xy 平面上の領域の面積を S_n 、その領域に含まれる x 座標と y 座標がともに整数である点の個数を L_n とおく。

- (1) $f(x) = x^3$ のとき、 L_n を n を用いて表せ。
- (2) $f(x) = x^3$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{S_n}$ を求めよ。
- (3) $f(x) = xe^x$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n ke^k$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{S_n}$ を求めよ。

4 1 個のさいころを 3 の倍数でない目が出るまで繰り返し投げるが、3 の倍数の目が 4 回続けて出たら投げるのを止める。これを 1 回の試行とする。1 回目の試行において出た目の和を S_1 、2 回目の試行において出た目の和を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とおく。

- (1) $S_1 \geq 6$ となる確率、および $S_1 \geq 7$ となる確率を求めよ。
- (2) $S = 9$ となる確率を求めよ。
- (3) $S \geq 11$ となる確率を求めよ。

2024 年度 徳島大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1) $\frac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

(3) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

2

(1) $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{2}t^2$

(2) $y = \frac{1}{2}x + 2, y = -x + \frac{1}{2}$

(3) $27X^2 = 8Y^3$

3

(1) $L_n = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n^2 - n + 2)$

(2) 1

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=0}^n ke^k = \frac{e}{e-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{S_n} = \frac{e}{e-1}$

4

(1) $P(S_1 \geq 6) = \frac{5}{18}, P(S_1 \geq 7) = \frac{5}{18}$

(2) $\frac{25}{216}$

(3) $\frac{43}{108}$