2024 年度　日本医科大学（前期）

医学部　試験時間：90 分

全問必答

1　角 α を $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$，かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる。三角形 OAB は OA $=2$，OB $=3$，$\alpha<\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとし，三角形 OAB の垂心を H とする。$x=\cos\angle\mathrm{AOB}$ とおくとき，以下の各問いの $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に入る適切な数を求めよ。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ は 1 以上の整数で答えよ。また $\boxed{\text{ス}}$ に関しては下の指示に従うこと。

(1)　x の動く範囲は $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{x\left(\boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}}\,x\right)}{\boxed{\text{オ}}\,(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{x\left(\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\,x\right)}{\boxed{\text{ク}}\,(1-x^2)}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(3)　三角形 HAB の面積 $S(x)$ は次のように表せる。

$$S(x) = \frac{\boxed{\text{ケ}}\,x^2 - \boxed{\text{コ}}\,x + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\,\sqrt{1-x^2}}$$

(4)　x が (1) で求めた範囲を $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{イ}}$ まで動くとき（ただし，端点は除く），(3) の $S(x)$ は，$\boxed{\text{ス}}$。

上記の文中の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の (あ)～(え) の中から 1 つ選べ。なお，以下の選択肢において，c は $\boxed{\text{ア}}<c<\boxed{\text{イ}}$ を満たす定数とする。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には (1) で求めた数が入る。

（あ）単調に増加する

（い）単調に減少する

（う）$\boxed{\text{ア}}<x<c$ で増加し，$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で減少する

（え）$\boxed{\text{ア}}<x<c$ で減少し，$c<x<\boxed{\text{イ}}$ で増加する

2　以下では $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ とする。中が見えない袋の中に，互いに区別のつかない白玉が m 個，互いに区別のつかない赤玉が n 個入っている。この袋の中から無作為に 1 個の玉を取り出し，その玉の色を確認したあとに取り出した玉を袋の中に戻すという操作を m 回繰り返す。この試行において赤玉が k 回取り出される確率を $p_{m,n}(k)$ とし，$q_{m,n}$，R_n，$S_n(k)$ を次式で定めるとき，以下の各問いに答えよ。

$$q_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}2^k\cdot p_{m,n}(k),\quad R_n=\lim_{m\to\infty}q_{m,n},\quad S_n(k)=\lim_{m\to\infty}p_{m,n}(k)$$

(1)　$q_{m,n}$ は

$$q_{m,n}=\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\right)^{\boxed{\text{ウ}}}$$

と表せる。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な m，n の整式を求めよ。答えのみでよい。

(2)　極限 R_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

(3)　極限 $S_n(k)$ を n，k を用いて表せ。答えのみでよい。

(4)　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N^4}\sum_{n=1}^{N}R_n\cdot S_n(3)\right\}$$

3　1 以上の整数 n に対して，I_n，J_n を次式で定める（ただし，e は自然対数の底である）。

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\left|\sin(nx)\right|dx,\quad J_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\left|\sin(nx)\right|}{e^x+\left|\cos(nx)\right|}dx$$

(1)　正の定数 a に対して，次の定積分の値を a を用いて表せ。答えのみでよい。

$$K(a)=\int_0^{\pi}e^{-ax}\sin x\,dx$$

(2)　正の定数 b に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right)$ の値を b を用いて表せ。

(3)　I_n を n を用いて表せ。答えのみでよい。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{n\pi}J_n$ の値を求めよ。

4　k を正の定数とする。O を原点とする座標空間において，zx 平面内の曲線 $C_1 : z^2 - x^2 = 1$（$z>0$），および xy 平面内の楕円 $C_2 : k^2x^2 + \dfrac{k^2}{k+1}y^2 = 1$ を考える。zx 平面内の C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ \sqrt{1+t^2})$（ただし，$t \geqq 0$）における C_1 の接線を L_1 とし，L_1 と直線 $x = z$ の交点を Q，L_1 と直線 $x = -z$ の交点を R とする。また，楕円 C_2 の焦点のうち y 座標が正の点を F とし，座標空間において直線 L_1 と点 F を通る平面を π とする。平面 π と xy 平面の交線を L_2 とし，直線 L_2 と楕円 C_2 の相異なる 2 つの交点を S，T とする。このとき，以下の各問いに答えよ。ただし，空間内の相異なる 2 点 X，Y に対して，XY は線分 XY の長さを表す。

(1)　次の方程式が zx 平面内の直線 L_1 を表すように，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に入る適切な式を t を用いて表せ。答えのみでよい。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

(2)　次の方程式が平面 π を表すように，$\boxed{\text{ウ}}$ に入る適切な式を k を用いて表せ。答えのみでよい。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ には (1) で求めた式が入る。

$$\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{ウ}}\,y + \boxed{\text{イ}}\,z = 1$$

(3)　QR を t を用いて表せ。また，ST を t，k を用いて表せ。答えのみでよい。

(4)　0 以上の実数 t に対して $f_k(t) = \dfrac{\mathrm{ST}}{\mathrm{QR}}$ と定める。$f_k(t)$ を t の関数と考えたとき，$f_k(t)$ が極値をとるための k に対する必要十分条件を求めよ。

2024 年度　日本医科大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　ア：0　イ：$\frac{2}{3}$

(2)　ウ：3　エ：2　オ：2　カ：2　キ：3　ク：3

(3)　ケ：6　コ：13　サ：6　シ：2

(4)　ス：(い)

2

(1)　ア：$m+2n$　イ：$m+n$　ウ：m

(2)　$R_n = e^n$

(3)　$S_n(k) = \dfrac{n^k}{k!\cdot e^n}$

(4)　$\dfrac{1}{24}$

3

(1)　$K(a) = \dfrac{e^{-\pi a}+1}{a^2+1}$

(2)　b

(3)　$I_n = \dfrac{(1-e^{-\pi})ne^{-n\pi}\left(1+e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}{(n^2+1)\left(1-e^{-\frac{\pi}{n}}\right)}$

(4)　$\dfrac{2(1-e^{-\pi})}{\pi}$

4

(1)　ア：$-t$　イ：$\sqrt{1+t^2}$

(2)　ウ：$\sqrt{k}$

(3)　$\mathrm{QR} = 2\sqrt{1+2t^2}$，$\mathrm{ST} = \dfrac{2(k+t^2)\sqrt{k+1}}{k(k^2+k+t^2)}$

(4)　$k>4+2\sqrt{3}$