

2024 年度 札幌医科大学（前期）

医学部

試験時間：100 分

全問必答

1 次の各問に答えよ。

- (1) x と y を $x > 0$, $y \neq 0$ をみたす実数とする。複素数 $z = x + iy$ (ただし i は虚数単位である) が方程式 $z^3 = \bar{z}^2$ の解 (ただし \bar{z} は z と共役な複素数を表す) であるとき, x の値を求めよ。ただし答えは三角関数を用いずに表すこと。
- (2) 座標空間における 4 点 $A(-\frac{7}{3}, 2, -1)$, $B(-\frac{5}{3}, -1, 4)$, $C(0, 2, \frac{2}{3})$, $D(4, 5, -1)$ に対し, A と B を通る直線を ℓ , C と D を通る直線を m とする。このとき, ℓ と m の交点の座標を求めよ。
- (3) 1 から 1000 までの自然数のうち, 4, 6, 10 のいずれかで割り切れる数は全部で何個あるか。

2 θ を $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする。座標平面上の楕円 $E: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ に対して, 直線 $\ell: x \sin \theta - y \cos \theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ A, C とし, 直線 $m: x \cos \theta + y \sin \theta = 0$ と E との 2 つの交点をそれぞれ B, D とする。ただし, A の x 座標および B の y 座標は共に正とする。

(1) 2 点 A と B の座標を θ の式で表せ。

以下, 四角形 $ABCD$ の面積を S とする。

(2) S を $\cos 2\theta$ の式で表せ。

(3) θ が $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, S の最大値と最小値を求めよ。また, S が最大値と最小値をとるとき θ の値もそれぞれ答えよ。

3 1 から 6 までの数字が一つずつ各面に書かれているが, 面に書かれている数字を消して元の数字とは別の数字 (ただし 1 から 6 までの数字) に書き換えることができる六面体のサイコロがある。書き換える際に, どの数字に書き換えられるかは同様に確からしいものとする。数字を書き換える前 (1 から 6 が一つずつ書かれている状態) のサイコロを「前サイコロ」と呼ぶ。一方, 一つの面の数字を消して別の数字に書き換えたサイコロを「後サイコロ」と呼ぶ。

(1) 「後サイコロ」の面に書かれている数字の合計を S_1 とする (例えば, 「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられた場合, $S_1 = 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 6 = 18$ となる)。このとき $S_1 > 18$ となる確率を求めよ。

(2) 「前サイコロ」を二つ用意し, それぞれの「後サイコロ」を作成する。二つの後サイコロの面に書かれている数字の合計を S_2 とする (例えば, 一つ目の「前サイコロ」の「4」の面の数字が「1」に書き換えられ, 二つ目の「前サイコロ」の「3」の面の数字が「2」に書き換えられた場合, $S_2 = (1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 6) + (1 + 2 + 2 + 4 + 5 + 6) = 38$ となる)。このとき $S_2 = 36$ となる確率を求めよ。

4 $f(x) = \sqrt{x+2}$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフを C_1 ，その逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを C_2 とする。

- (1) $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。
- (3) C_1 ， C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (4) 直線 $y = x$ ， C_2 および y 軸で囲まれた部分を， x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

2024 年度 札幌医科大学（前期）

医学部

（略解）

☞ 証明，図示などは省略

1

(1) $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ (2) $(-2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (3) 366 個

2

(1) $A\left(\sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}}, \tan\theta\sqrt{\frac{6}{3+2\tan^2\theta}}\right), B\left(-\tan\theta\sqrt{\frac{6}{2+3\tan^2\theta}}, \sqrt{\frac{6}{2+3\tan^2\theta}}\right)$

(2) $S = \frac{24}{\sqrt{25 - \cos^2 2\theta}}$

(3) 最大値： $2\sqrt{6}$ ($\theta = 0$)，最小値： $\frac{24}{5}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$)

3

(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{7}{180}$

4

(1) $f^{-1}(x) = x^2 - 2$ ($x \geq 0$)

(2) (2, 2)

(3) $\frac{20 - 4\sqrt{2}}{3}$

(4) $\frac{22 + 32\sqrt{2}}{15}\pi$