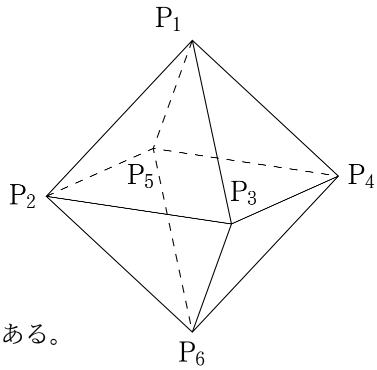
2024 年度　獨協医科大学（前期）

医学部　　試験時間：60 分

全問必答

1　正八面体 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ がある。1 個のさいころを投げて出た目が n のとき，頂点 P_n に赤い印をつけるという試行をくり返す。この試行を k 回終えた時点で両端に赤い印がついている辺を赤色で塗ったとき，赤色で塗られた辺の総数を m_k で表す。



(1)　$m_2=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　$m_3=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$，$m_3=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3)　$m_4=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$m_4=0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(4)　さいころを 4 回投げる場合において，辺 P_1P_2 が赤色に塗られるとき，$m_4=3$ である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。

2　座標空間に球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 9 = 0$ があり，点 $\mathrm{A}(3,\ 2,\ -2)$ は球面 S 上の点である。

点 $(3,\ 4,\ 6)$ を通り $\overrightarrow{d} = (1,\ 1,\ 2)$ に平行な直線を ℓ とし，ℓ と S の 2 つの交点のうち，x 座標が負であるものを B，正であるものを C とする。

(1)　点 B，C の座標は，それぞれ，

$$\mathrm{B}\left(-\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ -\boxed{\text{ウ}}\right),\ \mathrm{C}\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

(2)　平面 ABC に垂直で，かつ y 成分が正であるような単位ベクトルの成分表示は

$$\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}\left(\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シス}}\right)$$

である。

(3)　三角形 ABC の外心を J とすると，J の座標は

$$\mathrm{J}\left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\right)$$

である。

(4)　球面 S 上に点 D をとる。ただし，点 D は平面 ABC 上にないものとする。このとき，四面体 ABCD の体積の最大値は，

$$\boxed{\text{テ}} + \frac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

3 数列 $\{a_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）は

$$a_n>0,\ \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 3n^2+2n$$

を満たす。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\sqrt{\boxed{\text{ア}}\,n-\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) xy 平面において，点列 P_n，Q_n，R_n を

$$\mathrm{P}_n\left(a_n,\ \frac{1}{{a_n}^2}\right),\ \mathrm{Q}_n\left(0,\ \frac{1}{{a_n}^2}\right),\ \mathrm{R}_n(a_n,\ 0)$$

と定義する。四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n，四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を T_n とする。

(i) S_n を n を用いて表すと

$$S_n=\frac{\boxed{\text{ウ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{エ}}\,n-\boxed{\text{オ}}}+\sqrt{\boxed{\text{カ}}\,n+\boxed{\text{キ}}}\right)}{\left(\boxed{\text{エ}}\,n-\boxed{\text{ク}}\right)\left(\boxed{\text{カ}}\,n+\boxed{\text{ケ}}\right)}$$

である。

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{T_n}{S_n}}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(iii) t を実数の定数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^t S_n$ が 0 以外の有限な値 α に収束するとき

$$t=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

4　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$ について，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とする。

(1)　$f(x)$ は $x=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，極大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ をとる。

また，C_1 の変曲点の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{エオ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}\right)$ である。

(2)　t を正の実数とする。xy 平面において，C_1 を x 軸方向に $-t$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とすると

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コ}}\,t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。また，式 $\dfrac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5}$ を t のみの式で表すと

$$\frac{(\alpha+t)^2+5}{\alpha^2+5}=\frac{\left(t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}\right)^2}{\boxed{\text{セソ}}}$$

となる。C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\boxed{\text{タ}}\log\left(t+\sqrt{t^2+\boxed{\text{サシ}}}\right)-\log\left(t^2+\boxed{\text{チ}}\right)-\boxed{\text{ツ}}\log\boxed{\text{テ}}$$

である。t が $t>0$ の範囲で変化するとき，$S(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のとき最大値をとる。

2024 年度　獨協医科大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{ア}{イ}:\dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{ウ}{エ}:\dfrac{2}{9}$　$\dfrac{オ}{カ}:\dfrac{1}{3}$

(3) $\dfrac{キ}{ク}:\dfrac{1}{3}$　$\dfrac{ケ}{コサ}:\dfrac{1}{27}$

(4) $\dfrac{シス}{セソタ}:\dfrac{36}{151}$

2

(1) $(-ア,\ イ,\ -ウ):(-1,\ 0,\ -2)$　$(エ,\ オ,\ カ):(1,\ 2,\ 2)$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{キク}}(ケコ,\ サ,\ シス):\dfrac{1}{\sqrt{21}}(-2,\ 4,\ -1)$

(3) $\left(\dfrac{セ}{ソ},\ \dfrac{タ}{ソ},\ \dfrac{チツ}{ソ}\right):\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{9}{7},\ \dfrac{-4}{7}\right)$

3

(1) $ア\,n-イ:6n-1$

(2) (i) $\dfrac{ウ\left(\sqrt{エ\,n-オ}+\sqrt{カ\,n+キ}\right)}{(エ\,n-ク)(カ\,n-ケ)}:\dfrac{3\left(\sqrt{6n-1}+\sqrt{6n+5}\right)}{(6n-1)(6n+5)}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{コ}}{サ}:\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $\dfrac{シ}{ス}:\dfrac{3}{2}$　$\dfrac{\sqrt{セ}}{ソ}:\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

4

(1) $\sqrt{ア}:\sqrt{5}$　$\dfrac{\sqrt{イ}}{ウ}:\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　$\left(\sqrt{エオ},\ \dfrac{\sqrt{カキ}}{クケ}\right):\left(\sqrt{15},\ \dfrac{\sqrt{15}}{10}\right)$

(2) $\dfrac{コ\,t+\sqrt{t^2+サシ}}{ス}:\dfrac{-t+\sqrt{t^2+20}}{2}$　$セソ:20$　$タ:2$　$チ:5$　$ツ\log テ:2\log 2$　$\dfrac{\sqrt{トナ}}{ニ}:\dfrac{\sqrt{10}}{2}$