2024 年度　長崎大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1)　p，q を実数とし，互いに異なるベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を，

$$\vec{a}=(1,\ p),\ \vec{b}=(q,\ -1),\ \vec{c}=(-1,\ 1)$$

とする。$\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{c}$ は垂直であり，$\vec{b}-\vec{c}$ と $\vec{a}$ は平行であるとき，p，q の値をそれぞれ求めよ。

(2)　微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x，y に対して

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を満たしている。このとき，$f(0)$ の値を求めよ。また，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$ のとき，$f'(x)$ および $f(x)$ をそれぞれ求めよ。

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x(x^2-x^4)}{1+e^x}\,dx$ が成り立つことを示し，定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2-x^4}{1+e^x}\,dx$ を求めよ。

(4)　n を整数とするとき，n^2 を 3 で割った余りは 2 にならないことを，$n=3k$，$n=3k+1$，$n=3k+2$（k は整数）のそれぞれの場合について示せ。

　また，l，m，n を整数とするとき，$l^2+m^2=n^2$ ならば，l または m は 3 の倍数となることを，背理法を用いて証明せよ。

2　原点を O とする xy 座標平面上において，放物線 $C:y=x^2$ と直線 $\ell:y=x$ があり，C と ℓ で囲まれた領域の周および内部を図形 F とする。

　また，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\,t^2)$（$0\leqq t\leqq 1$）を通り，ℓ に垂直な直線を m とし，m と ℓ との交点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　図形 F を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　直線 m の方程式および点 Q の座標を，t を用いてそれぞれ表せ。

(3)　線分 PQ の長さの平方 (PQ^2) を t を用いて表せ。

(4)　線分 OQ の長さを s とするとき，s および $\dfrac{ds}{dt}$ を，t を用いてそれぞれ表せ。

(5)　図形 F を直線 ℓ の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。また，(1) で求めた V_1 との比 $\dfrac{V_2}{V_1}$ を求めよ。

3　下図のように，一辺の長さが 1 の正方形 OABC がある。辺 OA 上に点 $\mathrm{P_1}$ をとり，$\mathrm{AP_1} = a_1$ とする。ただし，$0<a_1<1$ とする。

$\angle \mathrm{AP_1Q_1} = \angle \mathrm{BQ_1R_1} = \angle \mathrm{CR_1S_1} = \theta \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ となるように点 $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{R_1}$，$\mathrm{S_1}$ を，それぞれ辺 AB，BC，CO 上にとる。

さらに，$\angle \mathrm{OS_1P_2} = \angle \mathrm{AP_2Q_2} = \angle \mathrm{BQ_2R_2} = \angle \mathrm{CR_2S_2} = \theta$ となるように点 $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{S_2}$ を，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO 上にとる。

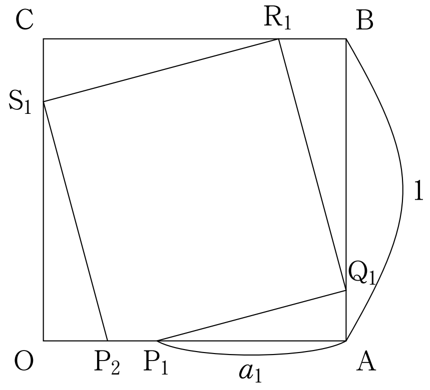
このような操作を繰り返し，点 P_n，Q_n，R_n，S_n を，それぞれ辺 OA，AB，BC，CO 上にとる。$\mathrm{AP}_n = a_n$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 AQ_n，BR_n，CS_n の長さを，a_n，θ を用いてそれぞれ表せ。

(2)　a_{n+1} を a_n，θ を用いて表せ。

(3)　a_n を a_1，n，θ を用いて表せ。

(4)　$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ が同じ点のとき，a_1 を θ を用いて表せ。また，$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ が異なる点のとき，この操作を繰り返すと，P_n は線分 OA をどのような比に内分する点に限りなく近づくか説明せよ。



図

4　z に関する 4 次方程式 $z^4 + pz^2 + qz + 27 = 0$（p，q は実数）がある。複素数 α と α^2 はこの 4 次方程式の解であり，α の実部と虚部はともに正とする。以下の問いに答えよ。ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役複素数を表すものとする。

(1)　z_1，z_2 が複素数のとき，$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$，および $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overline{\alpha}$ はこの 4 次方程式の解であることを示せ。

(3)　$\alpha + \alpha^2$ は純虚数であることを示せ。

(4)　$|\alpha|$ および α の値をそれぞれ求めよ。

(5)　この 4 次方程式のすべての解を求めよ。また，p，q の値をそれぞれ求めよ。

2024 年度　長崎大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $p=2,\ q=-2$

(2) $f(0)=0,\ f'(x)=2,\ f(x)=2x$

(3) $\dfrac{2}{15}$

(4) 証明は省略

2

(1) $V_1=\dfrac{2}{15}\pi$

(2) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

(3) $\mathrm{PQ}^2=\dfrac{(t-t^2)^2}{2}$

(4) $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{\sqrt{2}(2t+1)}{2}$

(5) $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

3

(1) $\mathrm{AQ}_n=a_n\tan\theta$
$\mathrm{BR}_n=\tan\theta-a_n\tan^2\theta$
$\mathrm{CS}_n=\tan\theta-\tan^2\theta+a_n\tan^3\theta$

(2) $a_{n+1}=1-\tan\theta+\tan^2\theta-\tan^3\theta+a_n\tan^4\theta$

(3) $a_n=\left(a_1-\dfrac{1}{1+\tan\theta}\right)(\tan^4\theta)^{n-1}+\dfrac{1}{1+\tan\theta}$

(4) $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{1+\tan\theta}$
$\mathrm{P}_1\neq\mathrm{P}_2$ のとき，線分 OA を $\sin\theta:\cos\theta$ に内分する点に近づく。（説明は省略）

4

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) $|\alpha|=\sqrt{3},\ \alpha=1+\sqrt{2}i$

(5) $p=8,\ q=-12$