

2024 年度 順天堂大学 (前期)

医学部
試験時間：70 分

全問必答

1 に適する解答をマークせよ。ただし、同一問題で同じ記号の がある場合は同一の値がはいる。

(1)

(a) $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx, B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ とすると,

$A + B = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \pi, A - B = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \log \text{オ}$ である。したがって,

$A = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \pi + \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \log \text{コ},$

$B = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \pi - \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \log \text{コ}$ である。

(b) $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 3}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx, D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2}{2 \sin x + 3 \cos x + 13} dx$ とすると,

$C = \frac{\text{サ}}{\text{シス}} \pi + \frac{\text{セ}}{\text{ソタ}} \log \frac{\text{チツ}}{\text{テト}},$

$D = \frac{\text{ナ}}{\text{ニヌ}} \pi - \frac{\text{ネ}}{\text{ノハ}} \log \frac{\text{ヒフ}}{\text{ヘホ}}$ である。

(2) 1 個のサイコロを 5 回投げるとき,

(a) 同じ目が続けて出ない確率は $\frac{\text{アイウ}}{\text{エオカキ}}$ である。

(b) 同じ目が 2 回以上続けて出る確率は $\frac{\text{クケコ}}{\text{サシスセ}}$ である。

(c) 同じ目が 4 回以上続けて出る確率は $\frac{\text{ソタ}}{\text{チツテト}}$ である。

(d) 同じ目が 3 回以上続けて出る確率は $\frac{\text{ナ}}{\text{ニヌ}}$ である。

(3) 実数 b, c を用いて一般項が $a_n = \sum_{k=0}^n b^{n-k}c^k$ と表される数列 $\{a_n\}$ を考える。

(a) $b = 3, c = -2$ のとき, a_5 を 5 で割った余りは ア である。

(b) $b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ である。

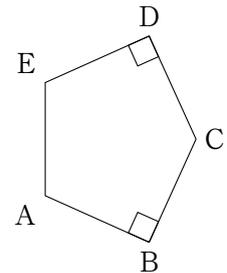
(c) $b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n = \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。ただし, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ ($|x| < 1$) を用いた。

2 に適する解答をマークせよ。

右図の五角形 ABCDE において,

$$AB = BC = CD = DE = EA = 1, \angle B = \angle D = 90^\circ$$

である。



(1) $\cos \angle ACE = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

また, 五角形 ABCDE の面積は $\frac{\text{ウ}}{\text{オ}} + \sqrt{\frac{\text{エ}}{\text{オ}}}$ である。

(2) $\vec{CB} = \vec{p}, \vec{CD} = \vec{q}$ とすると $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, \vec{p} \cdot \vec{q} = -\sqrt{\frac{\text{カ}}{\text{キ}}}$ である。

ここで $\vec{CA} = s\vec{p} + t\vec{q}$ とおくと, $\vec{CB} \cdot \vec{BA} = 0, |\vec{BA}| = 1, \vec{CD} \cdot \vec{BA} > 0$ より

$$s = \frac{\text{ク} + \sqrt{\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}}}{\text{コ}}, t = \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$$

辺 AE の中点を M とすると, $\vec{CM} = \frac{\text{ス} + \sqrt{\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}}}{\text{ソ}}(\vec{p} + \vec{q})$ となり,

$$\vec{MB} = -\frac{\text{タ} + \sqrt{\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}}}{\text{ツ}}\vec{p} - \frac{\text{テ} + \sqrt{\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}}}{\text{ナ}}\vec{q}$$

(3) 五角形 ABCDE と合同な五角形を用いて図 1 のように隙間も重なりもなく平面を敷き詰めることができる。この平面の敷き詰めを特徴づけるベクトルとして \vec{MM}' と \vec{MM}'' をとる。ただし, 点 M' は辺 A'E' の中点, 点 M'' は辺 A''E'' の中点である。

このとき,

$$\vec{MM}' = -\frac{\text{ニ} + \sqrt{\frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}}}{\text{ネ}}\vec{p} - \frac{\text{ノ} + \sqrt{\frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}}}{\text{ヒ}}\vec{q}$$

であり, $|\vec{MM}'|^2 = \frac{\text{フ}}{\text{ヘ}} + \sqrt{\frac{\text{ヘ}}{\text{ヘ}}}$, $\vec{MM}' \cdot \vec{MM}'' = \frac{\text{ホ}}{\text{ホ}}$ である。

また, $\triangle MM'M''$ の面積は $\frac{\text{マ} + \sqrt{\frac{\text{ミ}}{\text{ム}}}}{\text{ム}}$ である。

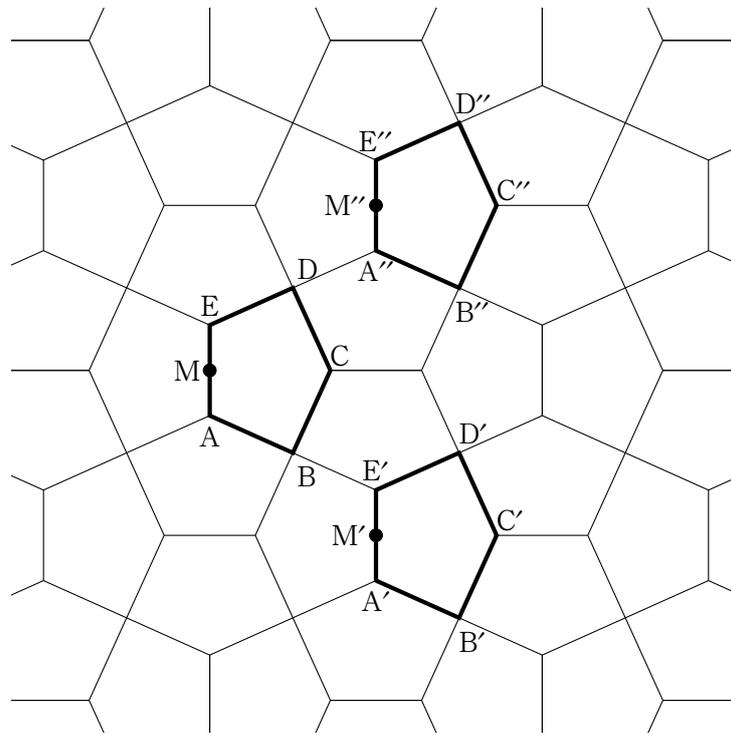


図 1 : 五角形による平面の敷き詰め

3 $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ を満たす連続な増加関数 $f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ を持つとする。このとき、正の整数 n に対して $a_n = f^{-1}(n)$ とし、

$$S_n = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} k(a_{k+1} - a_k) & (n \geq 2) \end{cases}$$

とする。

- (1) $f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、 a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $f(x) = \sqrt{x+1}$ のとき、 S_n を n を用いて表せ。
- (3) $f(x) = e^x$ のとき、 $S_n = n \log n - \log(n!)$ を示せ。
- (4) 正の整数 n に対して $n! \geq n^n e^{1-n}$ を示せ。

2024 年度 順天堂大学 (前期)

医学部

(略解)

☞ 証明, 図示などは省略

1

(1)

(a) $\text{ア} \sim \text{イ} : \frac{1}{4}$ $\text{ウ} \sim \text{オ} : \frac{1}{2} \log 2$ $\text{カ} \sim \text{コ} : \frac{1}{8} \pi + \frac{1}{4} \log 2$

(b) $\text{サ} \sim \text{ト} : \frac{3}{26} \pi + \frac{2}{13} \log \frac{15}{16}$ $\text{ナ} \sim \text{ホ} : \frac{1}{13} \pi - \frac{3}{13} \log \frac{15}{16}$

(2)

(a) $\text{ア} \sim \text{キ} : \frac{625}{1296}$

(b) $\text{ク} \sim \text{セ} : \frac{671}{1296}$

(c) $\text{ソ} \sim \text{ト} : \frac{11}{1296}$

(d) $\text{ナ} \sim \text{ヌ} : \frac{2}{27}$

(3)

(a) $\text{ア} : 3$

(b) $\text{イ} \sim \text{ウ} : \frac{1}{2}$

(c) $\text{エ} \sim \text{オ} : \frac{9}{8}$

2

(1) $\text{ア} \sim \text{イ} : \frac{3}{4}$ $\text{ウ} \sim \text{オ} : \frac{4 + \sqrt{7}}{4}$

(2) $\text{カ} \sim \text{キ} : \frac{\sqrt{7}}{4}$ $\text{ク} \sim \text{コ} : \frac{3 + \sqrt{7}}{3}$ $\text{サ} \sim \text{シ} : \frac{4}{3}$ $\text{ス} \sim \text{ソ} : \frac{7 + \sqrt{7}}{6}$ $\text{タ} \sim \text{ツ} : \frac{1 + \sqrt{7}}{6}$ $\text{テ} \sim \text{ナ} : \frac{7 + \sqrt{7}}{6}$

(3) $\text{ニ} \sim \text{ネ} : \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ $\text{ノ} \sim \text{ヒ} : \frac{7 + \sqrt{7}}{3}$ $\text{フ} \sim \text{ヘ} : 4 + \sqrt{7}$ $\text{ホ} : 0$ $\text{マ} \sim \text{ム} : \frac{4 + \sqrt{7}}{2}$

3

(1) $a_2 = 3, a_3 = 8$

(2) $S_n = \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1)$

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略