2024 年度　鹿児島大学（前期）

医学部　試験時間：120 分

全問必答

1　次の各問いに答えよ。

(1)　4 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 3 個のさいころの出る目が同じになる確率を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。

$$|x^2+6x-1| \leqq 7-x$$

(3)　次の数の大小関係を調べ，小さい順に並べよ。ただし，$3.1<\pi<3.2$ を用いてよい。

$$\frac{1}{2},\ \log_{11}\pi,\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

2　次の関数を考える。

$$y=4\sin^3\theta-4\cos^3\theta+3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \quad (0 \leqq \theta<2\pi)$$

また，$x=\sin\theta-\cos\theta$ とする。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y を x の関数で表せ。

(3)　y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

3 　次の $\boxed{\textbf{3-1}}$ ， $\boxed{\textbf{3-2}}$ ， $\boxed{\textbf{3-3}}$ ， から 1 題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{\textbf{3-1}}$ $c \geqq 3$ である実数 c に対して，x の 2 次方程式

$$x^2-2(c+1)x+c^2-2c+9=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　2 次方程式 ① は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ。

(1) の結果を用いて，次のように数列 $\{a_n\}$ を定める。$a_1=3$ とする。$c=a_1$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_1 より大きい方を a_2 とおく。次に $a_2>3$ が成り立つことに注意して，$c=a_2$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_2 より大きい方を a_3 とおく。これを繰り返す。すなわち，$3=a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n$ が成り立ち，2 次方程式

$$x^2-2(a_n+1)x+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} である。

(2)　$n \geqq 2$ とする。2 次方程式 ② の実数解のうち，小さい方は a_{n-1} であることを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2 \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

(4)　数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\textbf{3-2}}$ 座標空間において，点 A$(2,\ 0,\ 4)$，点 B$(3,\ -2,\ 5)$ を通る直線を ℓ，点 C$(3,\ 2,\ 2)$，点 D$(4,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする。

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を，0° と 180° の間の範囲で答えよ。

(2)　直線 ℓ，m が交わるか交わらないか調べよ。

(3)　直線 ℓ，m の両方と交わり，両方と直交する直線を n とする。n と ℓ の交点，および n と m の交点を求めよ。

$\boxed{\textbf{3-3}}$ 袋の中に -1，0，1 が書かれたカードがそれぞれ 1 枚，1 枚，m 枚ずつ入っている。ただし，m は自然数である。この袋の中から無作為に 2 枚同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1)　$m=2$ のとき，確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよ。

(2)　$m=9$ のとき，確率 $P(Y=1)$ を求めよ。

(3)　XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち，最小のものを求めよ。

4　座標平面上で，放物線 C が次の方程式で与えられている。

$$C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$$

原点 O から放物線 C に引いた接線で，傾きが正のものを ℓ とする。また，直線 ℓ と放物線 C との共有点を A とする。

(1)　直線 ℓ の方程式，および A の座標を求めよ。

(2)　直線 ℓ と点 A で接する円で，放物線 C との共有点が 2 個であるものを求めよ。

(3)　放物線 C，直線 ℓ および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

5　n を自然数とし，次の整式を考える。

$$f(x) = x^{6n} + x^{3n} - 2,$$
$$g(x) = x^2 + x + 1, \quad h(x) = x^2 - x + 1$$

(1)　方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし，方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ。

ここで，$f(x)$ を 2 次式で割ると，商が $(6n - 2)$ 次式，余りが 1 次以下の整式になることに注意すると

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),\ q(x) \text{ は } (6n-2) \text{ 次式},$$
$$r(x) \text{ は 1 次以下の整式}$$

と書ける。

(2)　$r(x) = 0$，つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

(3)　$f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，n は偶数であることを示せ。

(4)　$n = 1$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ。

2020 年度　鹿児島大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1) $\dfrac{5}{54}$

(2) $-8 \leqq x \leqq -3,\ -2 \leqq x \leqq 1$

(3) $\log_{11}\pi < \dfrac{1}{2} < \sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}$

2

(1) $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

(2) $y = -2x^3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 6x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(3) 最大値：$\dfrac{13\sqrt{2}}{4}\left(\theta = \dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi\right)$，最小値：$-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\left(\theta = \dfrac{7}{4}\pi\right)$

3

3−1

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) $b_n = 2n + 1,\ a_n = n^2 + 2$

3−2

(1) 120°

(2) 直線 ℓ と m は交わらない

(3) n と ℓ の交点：$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，$n$ と m の交点：$(2,\ 1,\ 4)$

3−3

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{54}{55}$

(3) $m = 4$

4

(1) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $(x-2)^2 + y^2 = 1$，$\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

5

(1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) $\cos\dfrac{2k}{3}\pi + i\sin\dfrac{2k}{3}\pi$，$\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{k}{3}\pi + i\sin\dfrac{k}{3}\pi\right)$　$(k = \pm 1)$