2025 年度　京都大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　次の各問に答えよ。

(1)　i は虚数単位とする。複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　次の定積分の値を求めよ。

(i)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}\,dx$　　(ii)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$

2　正の整数 x，y，z を用いて

$$N=9z^2=x^6+y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

3　e は自然対数の底とする。$x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える。

$$f(x)=x^2\log x$$

$$g(x)=x^2\log x-\frac{1}{1+2\log x}$$

実数 t は $t>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線を ℓ_t とする。直線 ℓ_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

4　座標空間の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする。s，t，u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる。

(1)　s，t，u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L，M，N の定める平面 LMN は，s，t，u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに，そのような点 P はただ一つに定まることを示せ。

(2)　四面体 OABC の体積を V とする。(1) における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。

5　θ は実数とする。xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする。θ が $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ。

6　n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき，k 回目（$1 \leqq k \leqq n$）に表が出たら $X_k = 1$，裏が出たら $X_k = 0$ として，X_1，X_2，$\cdots$，X_n を定める。

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき，Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

2025 年度　京都大学（前期）

医学部 （略解）

証明，図示などは省略

1

（1）　最大値：$\dfrac{5}{2}$，最小値：$\dfrac{3}{2}$

（2）

（i）　$4-2\log 2+\dfrac{\pi}{3}$　　（ii）　$\log 2$

2　2025

3　$-\dfrac{1}{9\sqrt{e}} \leqq p(t) \leqq 3e^3$

4

（1）　証明は省略　　（2）　$\dfrac{1}{2}V$

5　$(x+\sqrt{2})^2-y^2=1$　$(x \leqq -1-\sqrt{2})$，図示は省略

6

$$p_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$