2025 年度　東京大学（前期）

医学部　試験時間：150 分

全問必答

1　座標平面上の点 A(0, 0)，B(0, 1)，C(1, 1)，D(1, 0) を考える。実数 $0 < t < 1$ に対して，線分 AB，BC，CD を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする。さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする。また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする。

(1)　点 U_t の座標を求めよ。

(2)　t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ。

2

(1)　$x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ。

(2)　次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

3　平行四辺形 ABCD において，$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = b$，$a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある。

ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1)　$\angle \mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ。

(2)　S のとりうる値の最大値を a，b を用いて表せ。

4　この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく。

(1)　n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ。

(2)　$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件 (i)，(ii) が同値であることを示せ。

(i)　$N_a = 1$ である。

(ii)　$4a + 1$ は素数である。

5　n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ，札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から A_1，A_2，$\cdots$，A_n であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 (T_1)，(T_2)，$\cdots$，(T_{n-1}) を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 (T_{n-1})，$\cdots$，(T_2)，(T_1) を順に行ったところ，札の数字は左から 1，2，$\cdots$，n と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1)　A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2)　最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，$\cdots$，A_n の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

6　複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2)　α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3)　γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

2025 年度　東京大学（前期）

医学部　（略解）

証明，図示などは省略

1

(1)　$\mathrm{U}_t(3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)$

(2)　$\dfrac{3}{5}$

(3)　$2a^3-3a^2+3a$

2

(1)　証明は省略

(2)　$\log 2-\dfrac{1}{2}$

3

(1)　$S=\dfrac{2b^2-a^2}{4}\sin 2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta+\dfrac{ab}{2}$

(2)　$\begin{cases} a \leqq b \leqq \sqrt{2}a \text{ のとき，} & \dfrac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}+\dfrac{ab}{2} \\ b>\sqrt{2}a \text{ のとき，} & \dfrac{\sqrt{3}b^2}{4}+\dfrac{ab}{2} \end{cases}$

4

(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

5

(1)　証明は省略

(2)　$c_n=4c_{n-1}-2c_{n-2}$

6

(1)　証明は省略

(2)　図示は省略

(3)　最大値：$\dfrac{1}{2}$，最小値：$-\dfrac{1}{16}$